LA FONCTION LINEAIRE

I- Généralité :

La notion de fonction est très importante en **mathématiques** comme dans d'autres disciplines. Le mot apparaît souvent dans des expressions telles que « calculer le périmètre d'un carré en fonction de la longueur de son côté » ou encore « la distance de freinage varie en fonction du carré de la vitesse ».

Les fonctions linéaires sont des fonctions d'un type particulier, que l'on rencontre dans de nombreuses situations.

À quoi correspondent-elles ?

Exemple 1 :

Dans son magasin, une boulangère s'est fabriqué un petit tableau donnant le prix à payer par le client en fonction du nombre de baguettes qu'il achète.

Tableau :

Nombre de baguettes :

0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4

Prix à payer (en €) :

0,32
0,64
0,96
1,28
1,6
1,92
2,24
2,56

Ce tableau fournit la **correspondance** entre le nombre de baguettes achetées et le prix à payer. On dit que le prix à payer est **fonction** du nombre de baguettes achetées.
Ainsi, pour deux baguettes et demie achetées, le prix à payer est égal à 1,6 €. Cette correspondance sera notée de la manière suivante :

Il est facile de voir que, le prix d'une baguette étant égal à 0,64 €, il suffit de multiplier le nombre de baguettes achetées **par 0,64** pour obtenir le prix à payer.

En appelant *x* le nombre de baguettes achetées, le prix à payer est donc égal à 0,64*x*.
Avec la notation introduite précédemment, on peut écrire : x ----> 0,64 x.

Cette dernière écriture détermine entièrement la fonction représentée par le tableau ci-dessus.

En effet, on peut vérifier qu'en remplaçant *x* par un nombre quelconque de la première ligne du tableau, on obtient bien le nombre correspondant de la deuxième ligne.

Ainsi, pour *x* = 3, on obtient x = 3, x -----> 0,64 x3, soit 3 ---> 1,92.

Cette écriture permet aussi de calculer le prix d'un nombre de baguettes ne figurant pas dans le tableau.

Ainsi, pour *x* = 7, 7 ---> 0,64 x 7soit 7 ---> 4,48. Autrement dit : 7 baguettes coûtent 4,48 €.

Ce type de fonction est appelé **fonction linéaire**. Il correspond à une situation de proportionnalité : en effet, le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité, car on passe de la première à la deuxième ligne en multipliant toujours par le même nombre, à savoir 0,64.

Ce nombre est le coefficient de proportionnalité du tableau, on l'appelle le **coefficient de la fonction linéaire** x ---> 0,64 x.

1- Définition :

Soit *a* un nombre fixé ; la fonction qui à un nombre *x* fait correspondre le nombre *ax* est appelée **fonction linéaire de coefficient a** ; cette fonction est notée x ---> ax.

Dans la notation **x ---> ax**, le nombre *ax* est appelé **image de *x*** par la fonction linéaire.

Ainsi, la fonction x ---> 12 x est une fonction linéaire de coefficient 12.

Remarque :

L'image de 0 par toute fonction linéaire est 0. En effet, soit x ---> ax une fonction linéaire. Si *x* = 0, alors 0 ---> ax 0, autrement dit 0 ---> 0 soit a, et cela quel que soit *a*.

Cas particulier : si *a* = 0, la fonction linéaire de coefficient 0 est une fonction constante appelée fonction nulle, notée : x ---> 0. L'image de tout nombre *x* par cette fonction est 0.

Autre notation : si on appelle *f* une fonction, on peut noter *f* (*x*) (qui se lit « *f* de *x* ») l'image de *x* par la fonction *f*.
Par exemple, si *f* est la fonction linéaire x ---> 4 x, alors *f* (*x*) = 4*x*. Au lieu d'écrire 1----> 4, on peut écrire *f* (1) = 4 pour exprimer le fait que 4 est l'image de 1 par la fonction *f*.

2- Questions classiques :

***Question 1* :**

Déterminer les images de 14, $\frac{2}{3}$ et –6 par la fonction linéaire x ---> 3,5 x.

Pour $x = 14$, on a : 14 ---> -3,5 x 14, soit 14 ---> -49. L'image de 14 est –49.

Pour $x = \frac{2}{3}$, on a : $\frac{2}{3}$ ---> -3,5 x $\frac{2}{3}$, soit $\frac{3}{3}$ ---> $\frac{-7}{3}$. L'image de $\frac{2}{3}$ est $\frac{-7}{3}$.

Pour $x = –6$, on a : -6 ---> -3,5 x (-6), soit -6 ---> 21. L'image de –6 est 21.

Question 2 :

Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont linéaires et indiquer alors leur coefficient.

x ---> x ; x ---> 12 x + 5 ; x ---> x^2 ; x ---> $\frac{X}{7}$; x ---> 45,4 ; x ---> $\frac{-5}{6}$ x.

La fonction x ---> x est linéaire ; son coefficient est égal à 1.

La fonction x---> $\frac{x}{7}$ est linéaire ; son coefficient est égal à $\frac{1}{7}$.

La fonction x---> $\frac{-5}{6}$ est linéaire ; son coefficient est égal à $\frac{-5}{6}$.

Les trois autres fonctions ne sont pas linéaires.

II- Représentation graphique :

Toute fonction linéaire correspond à une situation de proportionnalité.

Comment représenter graphiquement une fonction linéaire ?

Exemple 1 :

Représentons graphiquement la fonction linéaire *x* ---> 2*x*.
Pour cela, on choisit un repère (O, I, J) du plan ; on porte ensuite une valeur de *x* en abscisse, et on porte en ordonnée l'image correspondante, ce qui fournit un point.

Ainsi, si $x = 1$, on a : 1 ---> 2, ce qui fournit le point de coordonnées (1 ; 2).

On choisit ainsi arbitrairement **quelques valeurs de *x* dont on calcule l'image**.
Pour simplifier la présentation, il est commode d'utiliser un tableau comme celui figurant ci-dessous :

Nom du point	A	B	C	D
Abscisse	1	-1	2	3
Ordonnée	2	-2	4	6

En plaçant ces points, on obtient le graphique de la figure 1.

On constate que les points A, B, C et D sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

Nous admettrons que tous les autres points que l'on aurait pu placer seraient également situés sur

cette droite : on dit que cette droite est la représentation graphique de la fonction linéaire x
$2x$.

1- Propriétés :

La représentation graphique d'une fonction linéaire est **une droite passant par l'origine du repère**.
On dit que la représentation graphique de la fonction linéaire x ---> ax est la droite d'équation $y = ax$.

Le coefficient a de la fonction linéaire est appelé **coefficient directeur** de la droite.

Exemple 2 : La représentation graphique de la fonction linéaire x ---> $3x$ est la droite d'équation $y = 3x$.

Cette équation donne une relation vérifiée par les coordonnées x et y de tout point de la droite. Pour tracer cette droite, on place des points dont les coordonnées sont $(x\,;\,y)$ en donnant des valeurs arbitraires à x.

Remarque :

Si la représentation graphique d'une fonction linéaire passe toujours par l'origine du repère, cela tient au fait que l'image de 0 par toute fonction linéaire est 0. Le point correspondant est donc le point de coordonnées (0 ; 0), c'est-à-dire l'origine du repère.

Exemples d'application :

Nous savons que toute fonction linéaire est représentée graphiquement par une droite passant par l'origine du repère : il suffit donc de déterminer un point de la droite différent de l'origine pour pouvoir la tracer.

Exemple 2 : on veut représenter graphiquement la fonction linéaire x ---> $-3x$.

On détermine un point en choisissant une valeur de x. Par exemple pour $x = 1$, on obtient 1 ---> –3, ce qui fournit le point **A** (1 ; –3).

La représentation graphique est donc la droite passant par **A** et par l'origine du repère.

Exemple 3 :

On veut représenter graphiquement la fonction linéaire
x ---> $\frac{x}{2}$, puis déterminer ensuite, par lecture graphique, les images des nombres –4 et 6.

Pour tracer la droite, choisissons $x = 4$. On obtient 4 ---> $\frac{4}{2}$, soit 4 ---> 2, ce qui fournit le point

B(4 ; 2).

Pour déterminer graphiquement l'image de –4, il suffit de déterminer le point de la droite dont l'abscisse est –4 et de lire son ordonnée. On obtient -4 ---> -2.

De même, on obtient par lecture graphique 6 ---> 3.

2- Interprétation :

Représentons graphiquement sur le même dessin les quatre fonctions linéaires suivantes :
X ---> -4x ; x ---> $-\frac{x}{2}$; x ---> 0,2 x ; x --- 3x.

Appelons D_1 la droite représentant la fonction x ---> -4 ; pour $x = 1$, on obtient 1 ---> -4, ce qui fournit le point **A**(1 ; –4) de D_1.

Appelons D_2 la droite représentant la fonction x ---> $-\frac{x}{2}$; pour $x = -4$, on obtient -4 ---> -2, ce qui fournit le point **B** (–4 ; 2) de D_2.

Appelons D_3 la droite représentant la fonction x ---> 0,2x ; pour $x = 5$, on obtient 5 ---> 1, ce qui fournit le point **C**(5 ; 1) de D_3.

Appelons D_4 la droite représentant la fonction x---> 3x ; pour $x = 2$, on obtient 2 ---> 6, ce qui fournit le point D(2 ; 6) de D_4.
Observons la figure obtenue :

Les coefficients directeurs des quatre droites sont : –4 pour la droite D_1 ; $\frac{1}{2}$ pour la droite D_2 ;

0,2 pour la droite D_3 ; 3 pour la droite D_4.

En observant ce graphique, on constate que :

D_1 et D_2, qui ont un coefficient directeur **négatif,** sont des droites « qui **descendent** » dans le sens des x croissants alors que D_3 et D_4, qui ont un coefficient directeur positif, sont des droites « qui montent » dans le sens des x croissants.

D_1 est plus **inclinée** que D_2 (or le coefficient directeur de D_1 (–4) est **inférieur** à celui de D_2 ($-\frac{1}{2}$) ; de manière analogue, D_4 est plus inclinée que D_3 (or le coefficient directeur de D_4 (3) est supérieur à celui de D_2 (0,2).

Conclusion **:**

Le coefficient directeur permet de distinguer les droites « **montantes** » des droites « **descendantes** » dans le sens des x croissants, ainsi que de comparer les « **pentes** » de différentes droites.

III- Détermination :

Quels sont les éléments dont on doit disposer pour déterminer une fonction linéaire ?

1- Détermination par calcul :

On sait qu'une fonction linéaire est une fonction du type x ---> ax, où *a* est un nombre fixé appelé coefficient de cette fonction. Par conséquent, pour déterminer une fonction linéaire, il suffit de trouver son coefficient.

Exemple 1 :

On veut déterminer la fonction linéaire qui à 12 fait correspondre l'image 44, autrement dit la fonction linéaire telle que : 12 ---> 44.

Toute application linéaire est de la forme x ---> ax ; il suffit pour la déterminer de trouver le coefficient *a.*
En remplaçant *x* par 12, on obtient : 12 ---> a x 12.
En identifiant les écritures 12 ---> a x 12 et 12 ---> 44, on déduit que *a* × 12 = 44, donc a = $\frac{44}{12}$, soit $\frac{11}{3}$.

La fonction linéaire cherchée est donc : x ---> $\frac{11}{3}$ x.

Exemple 2 :

Une automobile roule à la vitesse constante de 110 km/h. On veut démontrer que la distance parcourue (en km) par cette automobile est une fonction linéaire de la durée (en h) du parcours et déterminer cette fonction linéaire.

Rappelons la formule $d = v \times t$, où d désigne la distance parcourue, v la vitesse et t la durée du parcours. Ici, v = 110 km/h, donc $d = 110t$ (d en kilomètres et t en heures) ; par conséquent, la fonction qui à la durée du parcours fait correspondre la distance parcourue est : t ---> 110 t. Il s'agit bien d'une fonction linéaire, et son coefficient est **110,** c'est-à-dire la vitesse de l'automobile.

Exemple 3 **:**

Un commerçant décide de faire une remise de 30 % sur tous les articles de son magasin. On veut démontrer que le prix après réduction est une fonction linéaire du prix initial et déterminer cette fonction linéaire.

Appelons x le prix initial d'un article. Le prix après réduction sera alors égal à : $x - \frac{30}{100}$, soit $x \left(1 - \frac{30}{100}\right)$

$= x \times \left(\frac{70}{100}\right) = 07x.$

Par conséquent, la fonction qui au prix initial fait correspondre le prix après réduction est : x ---> 0,7 x. Il s'agit bien d'une fonction linéaire, et son coefficient est **0,7**.

Exemple 4 **:**

On verse de l'eau dans un verre qui a la forme d'un cylindre de révolution de 12 cm de hauteur et de 8 cm de diamètre. On veut démontrer que la fonction qui à la hauteur h (en cm) de l'eau dans le verre fait correspondre le volume (en cm^3) d'eau est une fonction linéaire et déterminer cette fonction linéaire.

Rappelons que le volume V d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h est donné par la formule : $V = \pi\ r^2 h$.

Le diamètre du cylindre est égal à 8 cm, son rayon est donc égal à 4 cm. Le volume d'eau correspondant à une hauteur de h cm dans le verre est donc : $V = \pi \times 4^2 \times h = 16\ \pi h$.

Par conséquent, la fonction qui à la hauteur d'eau dans le verre fait correspondre le volume d'eau est : h ---> 16 πh ; il s'agit bien d'une fonction linéaire, et son coefficient est **16** π.

2- Détermination par graphique :

Exemple :

On veut déterminer la fonction linéaire représentée sur la figure par la droite *D*.

On détermine par lecture graphique les coordonnées d'un point M (distinct de O) de la droite : ici M a pour coordonnées (–5 ; 3).

Notons x ---> ax la fonction linéaire à déterminer. Dire que le point M est sur la droite qui représente cette fonction linéaire, c'est dire que -5 ---> 3. D'autre part, en remplaçant *x* par –5 dans l'écriture x ---> a x, on obtient -5 ---> ax (-5).

En identifiant ces deux écritures, on obtient : $a \times (-5) = 3$, soit $a = 3 \div (-5) = -0,6$.
La fonction linéaire cherchée est donc : x ---> 0,6 x.

Remarque :

Cette méthode se ramène à celle qui est utilisée dans l'exemple du paragraphe 1.1 puisque la lecture du graphique permet de déterminer les coordonnées d'un point de la droite (distinct de O), ce qui fournit un nombre non nul et son image par la fonction linéaire.